9.11 Def: Die **Determinante** eines Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ ist

$$\det(f) := \det({}_B M_B(f))$$

für eine Basis B von V.

Diese Def. hängt nicht ab von der Wahl von B: Ist B' weitere Basis von V, so sind ${}_B M_B(f)$ und ${}_{B'} M_{B'}(f)$ ähnlich und es gilt:

9.12 Notiz: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

(Das folgt aus dem Multiplikationssatz 8.7:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\Rightarrow \det(A') = \cancel{\det(T)}^{-1} \cdot \det(A) \cdot \cancel{\det(T)} \in K)$$

9.13 Def: Das **charakteristische Polynom** χ_A von $A \in Mat_K(n \times n)$ ist

$$\chi_A := \det(A - X \cdot 1\!\!1_n) \in K[X]$$

$$= \det\left(A - \underbrace{\begin{pmatrix} X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X \end{pmatrix}}_{\in Mat_{K[X]}(n \times n)}\right)$$

$\uparrow$ Leibnizformel

$K[X]$: nur ein kommutativer Ring, macht aber nichts

Das charakteristische Polynom χ_f eines Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ (V endlich-dim.) ist das char. Polynom von ${}_B M_B(f)$ für eine Basis B von V.

9.14 Notiz χ_f ist wiederum unabhängig von der Wahl der Basis B, denn wiederum gilt:
Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Das kann man genau wie Notiz 9.12 zeigen, denn:

9.15 Notiz: Rechenregeln für Determinante (D1, D2, D3 aus Satz 8.4, Verhalten unter Zeilen- und Spaltentransformationen, Multipl.-Satz 8.7, Laplacescher Entwicklungs 8.9) gelten allgemeiner für Matrizen mit Koeff. in kommutativen Ringen.

9.16 Satz: $f: V \to V$ Endomorphismus; V endlich-dim.

Die EW von f sind genau die Nullstellen von χ_f.

Beweis:

Sei $a \in K$, B eine Basis von V

a ist EW von f

$$\overset{\text{Def.}}{\iff} \exists \underline{v} \neq \underline{0}: \quad f(\underline{v}) = \underbrace{a \cdot \underline{v}}_{a \cdot id(\underline{v})}$$

$$\iff \exists \underline{v} \neq 0: \quad (f - a \cdot id)(\underline{v}) = \underline{0}$$

$$\iff \ker(f - a \cdot id) \neq \{\underline{0}\}$$

$\iff$ $f - a \cdot id$ ist nicht injektiv

$\iff$ $f - a \cdot id$ ist kein Isomorphismus

Satz 5.19

$\iff$ ${}_B M_B(f - a \cdot id)$ ist nicht invertierbar

$$\iff \det \underbrace{{}_B M_B(f - a \cdot id)}_{{}_B M_B(f) - a \cdot {}_B M_B(id) \; = {}_B M_B(f) - a \cdot 1\!\!1_n} = 0$$

Invertierbarkeits-Kriterium

$$\iff \chi_f(a) = 0$$

$\square$

9.17 Rezept: EW & EV von f_A bestimmen.

$$K^n \xrightarrow{f_A} K^n \qquad (A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n))$$

1. Berechne $\chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathbb{1}_n)$
2. Bestimme alle Nullstellen $a_1, \dots, a_\ell$ von χ_A. Das sind die EW von f_A.
3. Löse für jeden EW a_i das LGS

$$\underbrace{(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n)}_{n \times n\text{-Matrix}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\mathrm{Eig}(f_A; a_i) = \mathcal{L}(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n).$$

□

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \circlearrowleft f = f_A, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

①

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 2-X & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{5-X} \end{pmatrix}$$

$$= (5-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$= (5-X)\left((2-X)^2 - 1\right)$$

② $\chi_f = (5-x)((2-x)^2-1)$

$\ldots$

$= (5-x)(x-1)\cdot(x-3)$

EW sind 5, 1, 3.

③ EW 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; | \cdot \tfrac{-1}{8} \; | \; 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Eig}(f;5) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EW 1:

$\mathrm{Eig}(f;1) = \ldots = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

EW 3:

$\mathrm{Eig}(f;3) = \ldots = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$